

Lezione del 29/03/04 ing. R. De Juliis

Metodi di risoluzione delle travi reticolari

- ipotesi alla base della risoluzione, definizione di trave reticolare, travi isostatiche, iperstatiche, labili

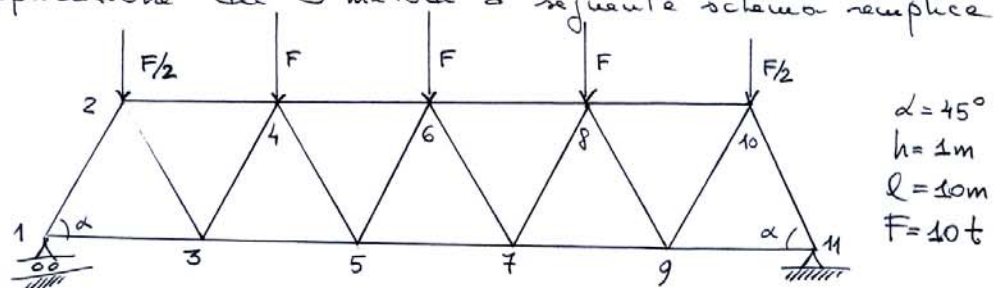
- Metodi di risoluzione

(1) scrittura delle equazioni di equilibrio ai nodi (soluzione grafica solo se c'è nodo con al massimo 2 aste concorrenti)

(2) sezioni di Ritter (considerazioni generali)

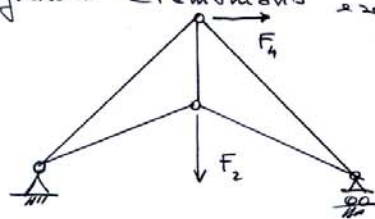
(3) diagramma Cremoniano

- Applicazione dei 3 metodi al seguente schema semplice



(analogia meccanica col caso di trave appoggiata-appoggiata).

per il diagramma Cremoniano esempio più semplice



riperimento:

E. Viola "Esercitazioni di
scienza delle costruzioni"
Vol. 1 pagg. 7.1 ÷ 7.17

(1)

- Calcolo di spostamenti e rotazioni mediante il principio dei lavori virtuali

Nell'ambito dei sistemi elastici il P.L.V. si annuncia

"in un solido deformabile soggetto ad un insieme di forze in equilibrio, il lavoro virtuale esterno è uguale al lavoro virtuale interno per qualsiasi insieme di spostamenti virtuali piccolissimi congruenti"

Nelle applicazioni si fa riferimento ad un sistema di forze fittizio (che lavora per la componente di spostamento che ci interessa calcolare) e ad un sistema di spostamenti reali.

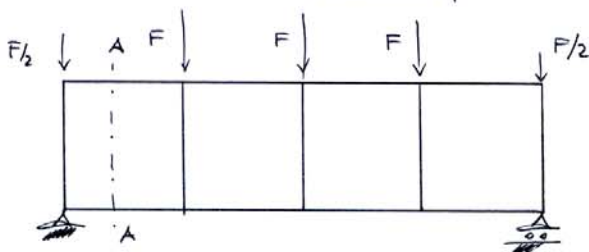
Si ricorda che il lavoro interno, nel caso sia solo il momento flettente a caratterizzare la deformata risulta avere, nel caso di sistemi forze fittizio e deformazioni reali pari a:

$$\Delta_{ri} = \int_S M^{(f)} \chi^{(r)} ds$$

Esempio:



- Trave reticolare Vierendeel



Hp: non si tiene conto del peso proprio aste
- metodo di Eugener di montanti co rigidi

Parsi

- Rigidezza togliute delle varie aste
- Reazioni agli appoggi
- Taglio nei correnti
- Momenti nei nodi ai correnti
- Sforzi normali nei correnti (sez. A-A)
- Momenti ai nodi nei montanti
- Sforzi normali nei montanti

- Considerazioni sulla deformata.

Tabella XXXI f

Momenti	$M^{(0)}$	$(\alpha^{(1)}) \times$	$M^{(1)}$	$(\alpha^{(2)}) \times$	$M^{(2)}$	$= M(\text{Kgm})$
	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	
M_{AB}	0	-0,0277	-463	-0,194	-226	57
M_{BA}	"	"	-331	"	-452	97
M_{BC}	"	"	331	"	452	-97
M_{CB}	"	"	28	"	1035	-202
M_{CD}	"	"	-28	"	-1035	202
M_{DC}	"	"	392	"	-615	108
M_{DE}	"	"	-392	"	615	-108
M_{ED}	"	"	-494	"	307	-46

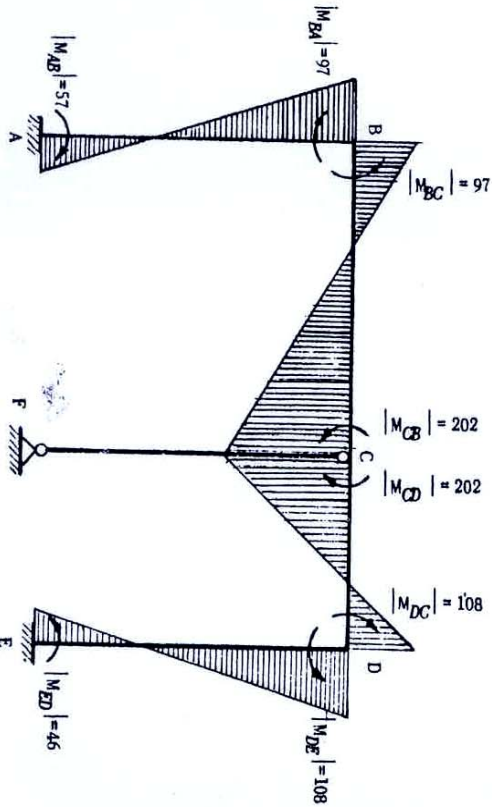


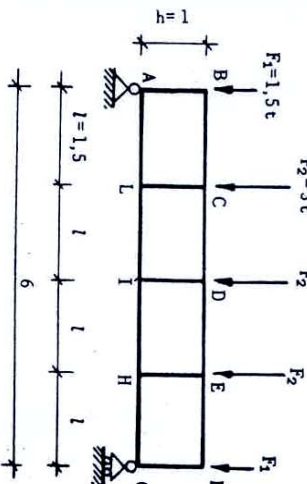
Fig. 444

diagramma momenti M

B) TRAVATURE (*)

ESERCIZIO 121 - Determinazione del diagramma dei momenti e dei valori degli sforzi normali nelle aste per una trave a tre campate in acciaio.

1) Dati: vedi fig. 445



Asta	Sezione
BC	2L 60x6
CD	2L 60x6
DE	2L 60x6
EF	2L 60x6
BA	2L 80x8
CL	2L 80x8
DI	2L 80x8
EH	2L 80x8
FG	2L 80x8
AL	2L 40x4
LI	2L 40x4
IH	2L 40x4
HG	2L 40x4

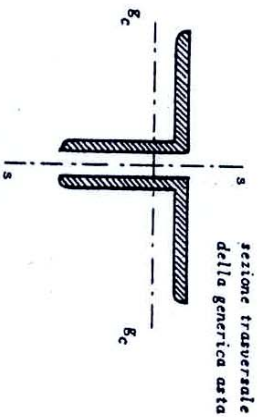


Fig. 445

2) Quantita' da determinare: tracciare il diagramma dei momenti e determinare gli sforzi normali nelle aste.

(*) Vedi: O. BELLUZZI - Scienza delle Costruzioni, vol. II - Zanichelli, Bologna; E. GIANGRECO - Teoria e Tecnica delle Costruzioni, vol. II - Liunopri, Napoli.

3) Osservazioni:

- non tener conto del peso proprio delle aste;
- effettuare il calcolo mediante il metodo approssimato di Engesser (*) ipotizzando cioè 'montanti infinitamente rigidi.

4) Calcolo:

a) schematizzazione di calcolo

In conformita' con l'ipotesi alla base del procedimento di

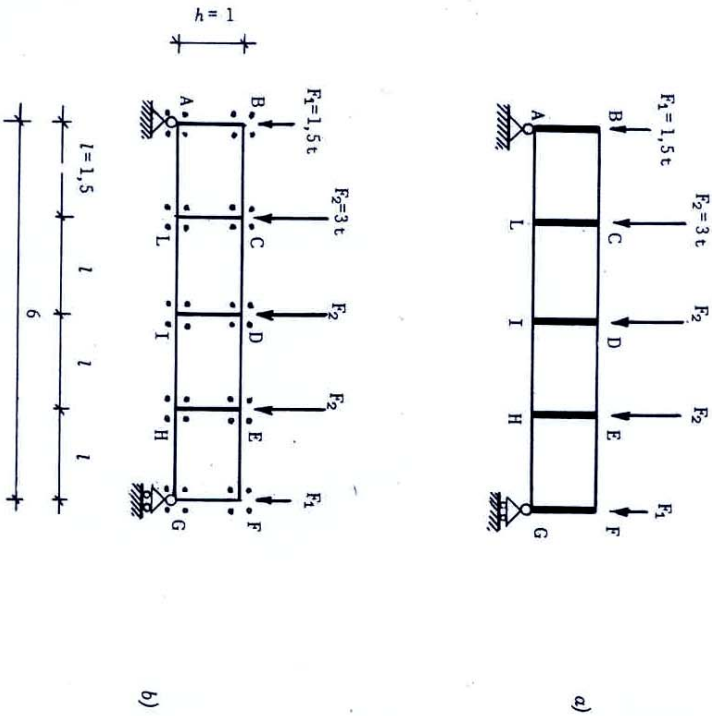


Fig. 446

(*) Confronta: O. BELLUZZI - Scienza delle Costruzioni, vol. II, cap. XX, par. 477 - Zanichelli, Bologna.

Engesser (*) si considerano i montanti infinitamente rigidi per cui la travatura si puo' schematizzare indifferentemente come indicato in fig. 446 a) o b).

b) rigidit  a taglio delle aste dei correnti

Indicati con I_s ed I_i i momenti d'inerzia costanti delle sezioni del corrente superiore ed inferiore relativamente ai rispettivi assi baricentrici g_s-g_c normali agli assi di sollecitazione $s-s$ (fig. 445), si ha (vedi tabella VI all'Appendice del I volume):

(*) Si riportano qui di seguito alcuni richiami del procedimento di Engesser per il calcolo delle travi Vierendeel.

Come e' noto tale procedimento e' basato sull'ipotesi di montanti infinitamente rigidi. Con riferimento a tale schematizzazione si procede, in perfetta analogia con la fase del procedimento di Grinler relativa al calcolo dei momenti d'incastro perfetto, alla determinazione dei tagli e dei momenti nei correnti.

Per ogni campo della travatura si puo' infatti calcolare il taglio che compete al corrente superiore ed a quello inferiore mediante ripartizione del taglio complessivo secondo i classici coefficienti di ripartizione a taglio. Noto il valore del taglio nei correnti e' possibile ricavare, quando si tenga conto che a causa della schematizzazione adottata i momenti hanno andamento lineare nei singoli campi con punto di nullo a meta' campo, i valori dei momenti nei correnti stessi in corrispondenza dei nodi.

La determinazione degli sforzi normali nei correnti puo' essere perseguita attraverso l'imposizione delle condizioni di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione orizzontale delle parti di travatura delimitate da sezioni verticali effettuate in corrispondenza della mezza-correnti risultano, come gia' detto, nulli a causa della schematizzazione adottata).

I momenti, i tagli e gli sforzi normali nei montanti possono essere in fine determinati attraverso l'imposizione delle condizioni di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione dei nodi.

$$I_s = 2 \times 22,8 = 45,6 \text{ cm}^4$$

$$I_i = 2 \times 4,47 = 8,94 \text{ cm}^4$$

Per le rigidzze a taglio, a causa dei valori costanti di I e di l , si hanno valori costanti per tutte le aste del corrente superiore e per tutte le aste del corrente inferiore.

Indicati con V_s e V_i tali valori costanti si ha:

- per le aste del corrente superiore:

$$V_s = \frac{12 E I_s}{l^3} = \frac{12 E}{l^3} \times 45,6 \text{ kg/cm}$$

- per le aste del corrente inferiore:

$$V_i = \frac{12 E I_i}{l^3} = \frac{12 E}{l^3} \times 8,94 \text{ kg/cm}$$

c) coefficienti di ripartizione dei tagli

Per tutti i campi, data la costanza delle rigidzze a taglio V_s e V_i , risulta (*):

$$\rho_s = \frac{V_s}{V_s + V_i} = \frac{45,6}{45,6 + 8,94} = \frac{45,6}{54,5} = 0,836$$

$$\rho_i = \frac{V_i}{V_s + V_i} = \frac{8,94}{54,5} = 0,164$$

(*) Con ρ_s e ρ_i si sono indicati rispettivamente i coefficienti di ripartizione dei tagli relativamente al corrente superiore ed al corrente inferiore.

d) reazioni degli appoggi

Data la simmetria dello schema, indicate con R_A ed R_G le reazioni verticali degli appoggi, risultano:

$$R_A = R_G = \frac{3 E_2 + 2 F_1}{2} = \frac{3 \times 3000 + 2 \times 1500}{2} = 6000 \text{ kg}$$

dirette verso l'alto.

e) taglio nei correnti

Indicato con T_i il taglio relativo al campo i-esimo della travatura (vedi fig.447), si ha:

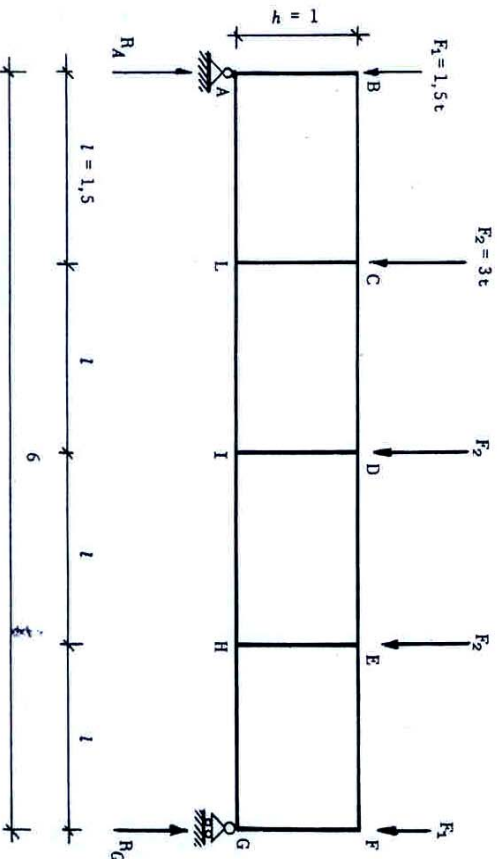


Fig. 447

$$T_1 = R_A - F_1 = 6000 - 1500 = 4500 \text{ kg}$$

$$T_2 = R_A - F_1 - F_2 = 6000 - 1500 - 3000 = 1500 \text{ kg}$$

$$T_3 = -T_2 = -1500 \text{ kg}$$

$$T_4 = -T_1 = -4500 \text{ kg}$$

Si ha di conseguenza:

$$T_{BC} = \rho_s T_1 = 0,836 \times 4500 = 3762 \text{ kg}$$

$$T_{AL} = \rho_i T_1 = 0,164 \times 4500 = 738 \text{ kg}$$

$$T_{CD} = \rho_s T_2 = 0,836 \times 1500 = 1254 \text{ kg}$$

$$T_{LI} = \rho_i T_2 = 0,164 \times 1500 = 246 \text{ kg}$$

$$T_{DE} = -T_{CD} = -1254 \text{ kg}$$

$$T_{IH} = -T_{LI} = -246 \text{ kg}$$

$$T_{EF} = -T_{BC} = -3762 \text{ kg}$$

$$T_{HG} = -T_{AL} = -738 \text{ kg}$$

f) *momenti ai nodi nei correnti*

Tenendo conto che a causa dell'ipotesi di infinita rigidità dei montanti nelle sezioni di mezzzeria delle aste dei correnti il momento è nullo, si ha (*) (fig. 448 a)).

$$M_{BC} = M_{CB} = -|T_{BC}| \cdot \frac{l}{2} = -3762 \times \frac{1,5}{2} = -2821 \text{ kgm}$$

$$M_{CD} = M_{DC} = -|T_{CD}| \cdot \frac{l}{2} = -1254 \times \frac{1,5}{2} = -940 \text{ kgm}$$

$$M_{DE} = M_{ED} = |T_{DE}| \cdot \frac{l}{2} = 1254 \times \frac{1,5}{2} = 940 \text{ kgm}$$

$$M_{EF} = M_{FE} = |T_{EF}| \cdot \frac{l}{2} = 3762 \times \frac{1,5}{2} = 2821 \text{ kgm}$$

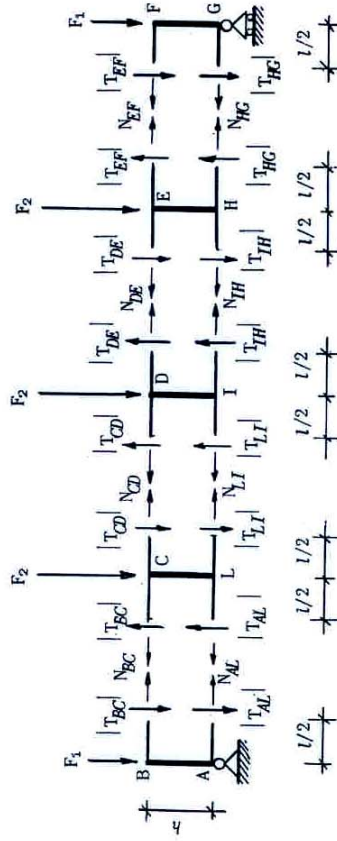
(*) Per il segno dei momenti si è adottata la convenzione di Cross e quindi sono stati assunti positivi i momenti che come azione delle aste sui nodi risultano antiorari.

$$M_{LA} = M_{AL} = -|T_{AL}| \cdot \frac{l}{2} = -738 \times \frac{1,5}{2} = -553 \text{ kgm}$$

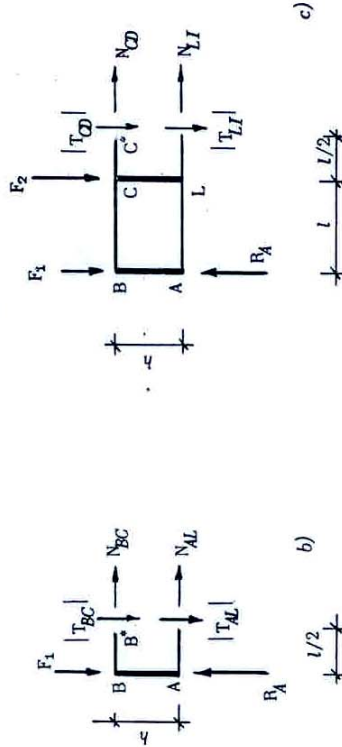
$$M_{LI} = M_{IL} = -|T_{LI}| \cdot \frac{l}{2} = -246 \times \frac{1,5}{2} = -184 \text{ kgm}$$

$$M_{IH} = M_{HI} = |T_{IH}| \cdot \frac{l}{2} = 246 \times \frac{1,5}{2} = 184 \text{ kgm}$$

$$M_{HG} = M_{GH} = |T_{HG}| \cdot \frac{l}{2} = 738 \times \frac{1,5}{2} = 553 \text{ kgm}$$



a)



b)

c)

N.B. - Gli sforzi normali N sono stati riportati col verso assunto positivo per convenzione. I tagli T e le reazioni R sono stati riportati coi loro versi effettivi.

Fig. 448

g) *sforzi normali nei correnti*

Le condizioni di equilibrio alla traslazione delle parti di

travatura delimitate da sezioni in mezzzeria dei campi (figg. 448 b) e c)) forniscono (*):

$$N_{BC} + N_{AL} = 0 \quad \text{da cui} \quad N_{BC} = -N_{AL}$$

$$N_{CD} + N_{LI} = 0 \quad \text{da cui} \quad N_{CD} = -N_{LI}$$

Le ulteriori relazioni utili per la determinazione degli sforzi normali vengono fornite dalle condizioni di equilibrio alla rotazione attorno a generici punti del piano medio della struttura, ad esempio attorno ai punti E* e C*. Si ottiene, rispettivamente:

$$-N_{AL} \cdot h - F_1 \cdot \frac{l}{2} + R_A \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$-N_{LI} \cdot h - F_1 \left(l + \frac{l}{2} \right) - F_2 \cdot \frac{l}{2} + R_A \left(l + \frac{l}{2} \right) = 0$$

da cui:

$$N_{AL} = \frac{1}{h} \left(-F_1 \cdot \frac{l}{2} + R_A \cdot \frac{l}{2} \right) = -1500 \times \frac{1,5}{2} + 6000 \times \frac{1,5}{2} = 3375 \text{ kg}$$

$$N_{LI} = \frac{1}{h} \left[-F_1 \left(l + \frac{l}{2} \right) - F_2 \cdot \frac{l}{2} + R_A \left(l + \frac{l}{2} \right) \right] = -1500 \times \left(1,5 + \frac{1,5}{2} \right) - 3000 \times \frac{1,5}{2} + 6000 \times \left(1,5 + \frac{1,5}{2} \right) = 7875 \text{ kg}$$

(*) Ci si è limitati, per la simmetria, a considerare i primi due campi della travatura.

e quindi (*):

$$N_{BC} = -3375 \text{ kg}$$

$$N_{CD} = -7875 \text{ kg}$$

ed ancora, per la simmetria:

$$N_{DE} = N_{CD} = -7875 \text{ kg}$$

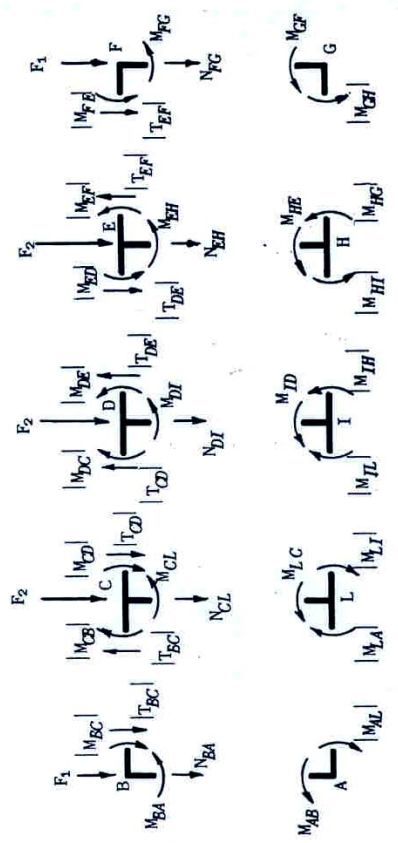
$$N_{EF} = N_{BC} = -3375 \text{ kg}$$

$$N_{IH} = N_{LI} = 7875 \text{ kg}$$

$$N_{HG} = N_{AL} = 3375 \text{ kg}$$

h) momenti ai nodi nei montanti

Le condizioni di equilibrio alla rotazione dei nodi si scrivono:



N.B. - Sforzi normali N e momenti M nei montanti sono stati riportati coi versi assunti positivi per convenzione. Togli T e momenti M nei correnti sono stati riportati coi loro versi effettivi.

- In corrispondenza dei nodi del corrente superiore si sono indicati i soli momenti e le sole forze ad azione verticale; in corrispondenza dei nodi del corrente inferiore i soli momenti. Fig. 449

(*) Gli sforzi normali nelle aste dei correnti si sarebbero potuti determinare più rapidamente tenendo conto che essi debbono formare una coppia (momento interno) di valore pari al momento delle forze esterne rispetto alla sezione di mezzzeria del campo considerato (momento esterno).

vono (*) (fig. 449):

$$\begin{aligned}
 -M_{BA} + |M_{BC}| &= 0 & ; & -M_{AB} + |M_{AL}| = 0 \\
 -M_{CL} + |M_{CB}| + |M_{CD}| &= 0 & ; & -M_{LC} + |M_{LA}| + |M_{LI}| = 0 \\
 -M_{DI} + |M_{DC}| + |M_{DE}| &= 0 & ; & -M_{ID} + |M_{IL}| - |M_{IB}| = 0 \\
 -M_{EH} + |M_{ED}| - |M_{EF}| &= 0 & ; & -M_{HE} - |M_{HI}| - |M_{HC}| = 0 \\
 -M_{FG} - |M_{FE}| &= 0 & ; & -M_{GF} - |M_{GH}| = 0
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 M_{BA} = |M_{BC}| &= 2821 \text{ kgm} & ; & M_{AB} = |M_{AL}| = 553 \text{ kgm} \\
 M_{CL} = |M_{CB}| + |M_{CD}| &= 2821 + 940 = 3761 \text{ kgm} \\
 M_{LC} = |M_{LA}| + |M_{LI}| &= 553 + 184 = 737 \text{ kgm} \\
 M_{DI} = |M_{DC}| - |M_{DE}| &= 940 - 940 = 0 \\
 M_{ID} = |M_{IL}| - |M_{IB}| &= 184 - 184 = 0 \\
 M_{EH} = -|M_{ED}| - |M_{EF}| &= -940 - 2821 = -3761 \text{ kgm} \\
 M_{HE} = -|M_{HI}| - |M_{HC}| &= -184 - 553 = -737 \text{ kgm} \\
 M_{FG} = -|M_{FE}| &= -2821 \text{ kgm} & ; & M_{GF} = -|M_{GH}| = -553 \text{ kgm}
 \end{aligned}$$

(*) Tenendo conto della simmetria si poteva limitare la scrittura della equazioni di equilibrio ai soli nodi di metà struttura e ricavare i valori dei momenti nei montanti relativi a tale parte utilizzando poi, per la determinazione dei restanti momenti, le condizioni di simmetria.

i) sforzi normali nei montanti
Le condizioni di equilibrio alla traslazione verticale dei nodi del corrente superiore si scrivono (**)(**) (fig. 449):

$$\begin{aligned}
 N_{BA} + F_1 + |T_{BC}| &= 0 & , \\
 N_{CL} + F_2 - |T_{BC}| + |T_{CD}| &= 0 & ; \\
 N_{DI} + F_2 - |T_{CD}| - |T_{DE}| &= 0 & ; \\
 N_{EH} + F_2 + |T_{DE}| - |T_{EF}| &= 0 & ; \\
 N_{FG} + F_1 + |T_{EF}| &= 0
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 N_{BA} &= -F_1 - |T_{BC}| = -1500 - 3762 = -5262 \text{ kg} \\
 N_{CL} &= -F_2 + |T_{BC}| - |T_{CD}| = -3000 + 3762 - 1254 = -492 \text{ kg} \\
 N_{DI} &= -F_2 + |T_{CD}| + |T_{DE}| = -3000 + 1254 + 1254 = -492 \text{ kg} \\
 N_{EH} &= -F_2 - |T_{DE}| + |T_{EF}| = -3000 - 1254 + 3762 = -492 \text{ kg} \\
 N_{FG} &= -F_1 - |T_{EF}| = -1500 - 3762 = -5262 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

l) diagramma dei momenti

Il diagramma dei momenti e' riportato in fig. 450.

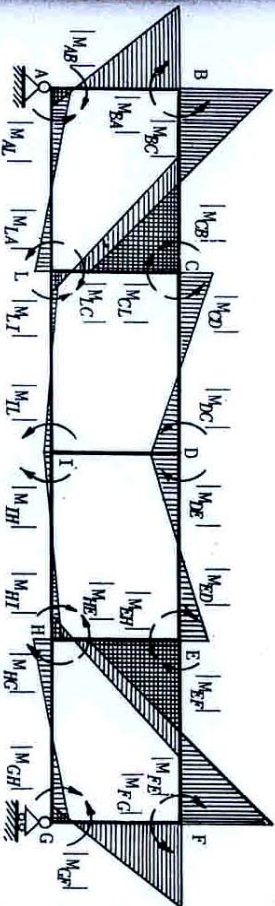


diagramma dei momenti

N.B. - I momenti indicati in corrispondenza dei nodi rappresentano le azioni dei nodi di sulle aste.

Fig. 450

(*) Si potevano indifferentemente scrivere le condizioni di equilibrio alla traslazione verticale dei nodi del corrente inferiore.

(**) Anche in questo caso, come per la determinazione dei momenti nei montanti (vedi nota a pag. 730), si poteva, utilizzando le condizioni di simmetria, limitare la scrittura delle equazioni di equilibrio ai nodi di metà struttura.